Chapitre 2
Composition de fonctions

Liste des exercices à travailler : 40, 41, 42, 43, 45, 46, 47, 48, 49

1. Composée de deux fonctions

a) Définition

Définition 1

Soient f une fonction définie sur un intervalle I et g une fonction définie sur un intervalle J, telles que pour tout $x \in I$ on a $f(x) \in J$. Alors pour tout $x \in I$, $g(f(x)$ est bien défini et la fonction $x \longmapsto g(f(x))$, notée $g \circ f$ (lire « g rond f ») et définie sur I, est appelée fonction composée de f par g.

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "g \circ f"] & J \arrow[r, "g"] & \mathbb{R} \\
x \arrow[r, mapsto] & f(x) \arrow[r, mapsto] & g(f(x))
\end{tikzcd}$$

Exemple 1

- Soit $f(x) = \mathrm{e}^x$ et $g(x) = x^2 + 3$.
  Alors $(g \circ f)(x) = (\mathrm{e}^x)^2 + 3 = \mathrm{e}^{2x} + 3$ et $(f \circ g)(x) = \mathrm{e}^{x^2+3}$
  $g \circ f$ et $g \circ f$ sont définies sur $\mathbb{R}$.

- Soit $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = 3x - 1$.
  $(g \circ f(x)) = 3\sqrt{x} - 1$ est définie sur $[0; +\infty[$
  $(f \circ g(x)) = \sqrt{3x - 1}$ est définie si $3x - 1 > 0$ donc définie sur $]\frac{1}{3}; +\infty[$.

Remarque

En général, $f \circ g \neq g \circ f$

b) Limites

Propriété 1

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et g une fonction définie sur un intervalle J telles que pour tout $x \in I$, $f(x) \in J$.
Soient a, b, c trois réels (ou $+\infty$ ou $-\infty$). Supposons que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ et que $\lim\limits_{x \to b} g(x) = c$, alors $\lim\limits_{x \to a} g \circ f(x) = c$

Application 1

Déterminer la limite de $\ln(3x - 8)$ lorsque $x \to 3$.

Solution :

Par opérations sur les limites, on sait que $\lim\limits_{x \to 3} (3x - 8) = 1$
Or, on sait aussi que $\lim\limits_{X \to 1} \ln(X) = 0$.
Ainsi, par composition de limites, on a $\lim\limits_{x \to 3} \ln(3x - 8) = 0$.

Application 2

Déterminer la limite de e^{x^2} lorsque $x \to +\infty$ et lorsque $x \to -\infty$.

Solution :

On sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ *et que* $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$.
De plus, $\lim\limits_{X \to +\infty} \mathrm{e}^X = +\infty$*, donc par composition de limites on a* $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{x^2} = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{x^2} = +\infty$.

c) Dérivée

Propriété 2

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et v une fonction définie et dérivable sur un intervalle J telles que pour tout $x \in I$, $u(x) \in J$.
Alors $v \circ u$ est dérivable sur I et

$$\forall x \in I, \quad (v \circ u)'(x) = u'(x) \times v' \circ u(x)$$

Application 3

Calculer les dérivées des fonctions suivantes en déterminant leur domaine de dérivabilité :

1. $f(x) = \mathrm{e}^{3x^2+5x}$
2. $g(x) = (4x-2)^6$
3. $h(x) = \sqrt{x^2+x+1}$
4. $k(x) = \ln(x^2+x+1)$

Solution :

1. $f(x) = v \circ u(x)$ *avec* $u(x) = 3x^2+5x$ *et* $v(x) = \mathrm{e}^x$*, toutes deux dérivables sur* $\mathbb{R}$.
De plus, $u'(x) = 6x+5$ *et* $v'(x) = \mathrm{e}^x$ *donc* f *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et :*

$$\begin{aligned} f'(x) &= (6x+5) \times v'(3x^2+5x) \\ &= (6x+5)\,\mathrm{e}^{3x^2+5x} \end{aligned}$$

2. $g(x) = v \circ u(x)$ *avec* $u(x) = 4x-2$ *et* $v(x) = x^6$. u *et* v *sont dérivables sur* $\mathbb{R}$ *avec* $u'(x) = 4$ *et* $v'(x) = 6x^5$. *Ainsi,* f *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et*

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4 \times v'(4x-2) \\ &= 4 \times 6(4x-2)^5 \\ &= 24(4x-2)^5 \end{aligned}$$

3. $h(x) = v \circ u(x)$ *avec* $u(x) = x^2+x+1$ *et* $v(x) = \sqrt{x}$.
u *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et* $u'(x) = 2x+1$. *De plus,* $\Delta < 0$ *donc* u *n'a pas de racines,* $u(x) > 0$ *quel que soit* $x \in \mathbb{R}$.
v *est dérivable sur* $]0;+\infty[$ *et* $v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.
Ainsi, f *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et*

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x+1) \times v'(x^2+x+1) \\ &= (2x+1) \times \frac{1}{2\sqrt{x^2+x+1}} \\ &= \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}} \end{aligned}$$

4. *$k(x) = v \circ u(x)$ avec $u(x) = x^2 + x + 1$ et $v(x) = \ln(x)$.*
Comme vu à la question précédente , $u(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $u'(x) = 2x + 1$ et v est dérivable sur $]0; +\infty[$ avec $v'(x) = \dfrac{1}{x}$.
Ainsi, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x+1) \times v'(x^2+x+1) \\ &= (2x+1) \times \frac{1}{x^2+x+1} \\ &= \frac{2x+1}{x^2+x+1} \end{aligned}$$

2. Généralisations

On généralise l'exemple précédent en plusieurs formules de dérivation pour les fonctions de la forme $f(ax+b)$, e^u, u^n, $\ln(u)$ et $\sqrt{u}$ avec u une fonction.

Propriété 3

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et $a, b \in \mathbb{R}$. Alors $g : x \longmapsto f(ax+b)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = af'(ax+b)$.

Démonstration : A partir de la formule vue dans la partie précédente

□

Propriété 4

Soit u une fonction définie sur un intervalle I. Alors $f : x \longmapsto \mathrm{e}^{u(x)}$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$, $f'(x) = u'(x)\,\mathrm{e}^{u(x)}$.
On retiendra :

$$\boxed{(\mathrm{e}^u)' = u'\,\mathrm{e}^u}$$

.

Démonstration : A partir de la formule vue dans la partie précédente

□

Propriété 5

Soit u une fonction définie sur un intervalle I. Alors $f : x \longmapsto (u(x))^n$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$, $f'(x) = nu'(x)(u(x))^{n-1}$.
On retiendra :

$$\boxed{(u^n)' = nu'u^{n-1}}$$

.

Démonstration : A partir de la formule vue dans la partie précédente

□

Propriété 6

Soit u une fonction définie sur un intervalle I à valeurs strictement positives. Alors $f : x \longmapsto \ln(u(x))$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$, $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

On retiendra :

$$\boxed{(\ln u)' = \frac{u'}{u}}$$

.

Démonstration : A partir de la formule vue dans la partie précédente

□

Propriété 7

Soit u une fonction définie sur un intervalle I à valeurs strictement positives. Alors $f : x \longmapsto \sqrt{u}$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$, $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$.

On retiendra :

$$\boxed{(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}}$$

.

Démonstration : A partir de la formule vue dans la partie précédente

□